



گزینه ۳

۱

باتوجه به فرمول‌های بسط 2α ، ابتدا کمی ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم. داریم:

$$\cos 2x + 7 \cos x + 4 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 7 \cos x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 + 7t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} \Rightarrow t = -3, \quad t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = -3 \quad \times \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

گزینه ۱

۲

معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$2 \sin x (\cos x - \sin x) = \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\xrightarrow[2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x]{2 \sin x \cos x = \sin 2x} \sin 2x + \cos 2x - 1 = \cos 2x \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

گزینه ۲

۳

با جایگذاری $1 - \sin^2 x$ به جای $\cos^2 x$ به یک معادله قابل تبدیل به درجه ۲ می‌رسیم:

$$4 \sin^4 x = 4(1 - \sin^2 x) - 1 \Rightarrow 4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = t} 4t^2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{4}, \quad t_2 = \frac{1}{4}$$

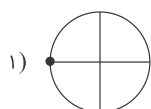
معادله $\sin^2 x = -\frac{3}{4}$ جواب ندارد. معادله $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ نیز به دو معادله $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ منجر می‌شود که در فاصله $(0, \pi)$ دارای جواب‌های $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ هستند. پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر با π است.

ابتدا کمی ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

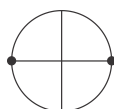
$$f(x) = \frac{2 \sin x + \sin 2x}{(1 + \cos x) \sin x} = \frac{2 \sin x + 2 \sin x \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} = \frac{2 \sin x (1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \sin x} = 2$$

اما دقت کنید! نقاطی که مخرج کسر را صفر می‌کنند، عضو دامنهٔ این تابع نیستند:

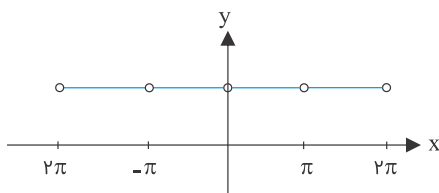
$$(1 + \cos x) \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 & (1) \\ \sin x = 0 & (2) \end{cases}$$



اجتماع این نقاط روی دایرهٔ مثلثاتی به صورت زیر می‌شود، یعنی ریشه‌های مخرج به صورت $x = k\pi$ بوده و دامنهٔ این تابع $\mathbb{R} - \{x | x = k\pi\}$ می‌باشد.



پس نمودار آن به صورت خط افقی $y = 2$ با نقاط توخالی در $x = k\pi$ است:



واضح است که دورهٔ تناوب این تابع $T = \pi$ می‌باشد.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\tan \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{1 + \tan^2 \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \frac{\sin \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}}}{\frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x} = \sqrt{x} \sin x$$

$$\Rightarrow (f \circ g)\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{16}} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{16}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

باتوجه به اینکه $\sin \sqrt{x} = \sqrt{x} \sin x \cos x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ داریم:

$$\sqrt{x} \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x \left(\sqrt{x} \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \left(\frac{\sqrt{x} \cos^2 x - 1}{\cos x} \right) = 0$$

بنابراین حداقل یکی از دو عبارت $\sin x$ و $\frac{\sqrt{x} \cos^2 x - 1}{\cos x}$ باید صفر باشند:

$$۱) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$۲) \frac{\sqrt{x} \cos^2 x - 1}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt[4]{x}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt[4]{x}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

دسته جواب‌های معادله $\cos^2 x = \frac{1}{\sqrt{x}}$ را می‌توان به فرم $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ در نظر گرفت. بنابراین جواب‌های کلی معادله عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \cos x \sin x + 2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = -2 \cos x \sin x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x = \sin(-2x) \xrightarrow{\sin(-2x) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)} \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow \text{نشدنی} \\ 2x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2x - \sin x}{\sin x \sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x} \Rightarrow \sin 4x (\sin 2x - \sin x) = 2 \sin x \sin 2x$$

$$\xrightarrow{\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x} 2 \sin 2x \cos 2x (\sin 2x - \sin x) = 2 \sin x \sin 2x$$

$$\xrightarrow[\text{ریشهٔ مخرج}]{\sin 2x \neq 0} \cos 2x (\sin 2x - \sin x) = \sin x \Rightarrow \cos 2x \sin 2x - \cos 2x \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow \cos 2x \sin 2x = \sin x (1 + \cos 2x) \xrightarrow{1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x} \cos 2x \sin 2x = 2 \sin x \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x \cos 2x = 2 \sin x \cos^2 x \xrightarrow{\sin x, \cos x \neq 0} \cos 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = 2k\pi \text{ یا } x = \frac{2k\pi}{3}$$

باتوجه به فرض، روابط $\sin x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$, $\sin 4x \neq 0$ باید برقرار باشند. پس: $\frac{k\pi}{2}$, $\frac{k\pi}{3}$, $x \neq k\pi$. بنابراین در بازه $[0, 2\pi]$ فقط دو جواب $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ $x = \frac{2\pi}{3}$ قابل قبول است.

اولاً:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{توان دو}} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

ثانیاً:

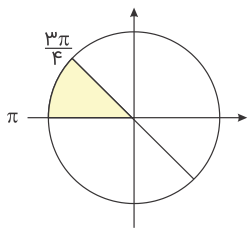
$$\sin \alpha \sin^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} - \sin \alpha \cos^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} = \sin \alpha (\sin^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} - \cos^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}})$$

$$= \sin \alpha (\underbrace{\sin^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} - \cos^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}}_{-\cos \alpha}) (\underbrace{\sin^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} + \cos^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}}_1)$$

$$= -\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - 1}{\sqrt{1 - \sin 2\alpha} + 1} = \frac{\sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} - 1}{\sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} + 1} = \frac{|\sin \alpha + \cos \alpha| - 1}{|\sin \alpha - \cos \alpha| + 1}$$

اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ باشد، $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ است. پس داریم:

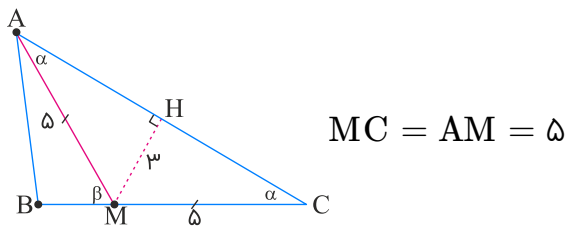


$$\begin{aligned} \frac{|\sin \alpha + \cos \alpha| - 1}{|\sin \alpha - \cos \alpha| + 1} &= \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1} = \frac{-\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} \cos^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} - 1)}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - (1 - \sqrt{2} \sin^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}})} \\ &= \frac{-\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sin^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}} = \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (\sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}})} = -\cot \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم:

$$\widehat{AMB} = \beta$$

باتوجه به شکل $\beta = 2\alpha$ است.



از طرفی:

$$\sin \beta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین باتوجه به شکل:

$$CH^2 = MC^2 - MH^2 = \omega^2 - \omega^2 \Rightarrow CH = \omega$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به شکل}} \sin \alpha = \frac{\omega}{\omega}, \cos \alpha = \frac{\omega}{\omega} \Rightarrow \sin \beta = 2 \times \frac{\omega}{\omega} \times \frac{\omega}{\omega} = \frac{2\omega}{\omega}$$

کمی عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{\cos x} - 2 \cos x \right) \sqrt{2 + 2 \cos 2x} = \left(\frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos x} \right) \sqrt{2(1 + \cos 2x)} \quad (I)$$

حال از آنجا که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \text{الف) } 1 - 2 \cos^2 x = -\cos 2x \\ \text{ب) } 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \end{cases}$$

پس عبارت (I) به این صورت درمی‌آید:

$$\left(\frac{-\cos 2x}{\cos x} \right) \sqrt{2(2 \cos^2 x)} = \left(\frac{-\cos 2x}{\cos x} \right) \underbrace{\sqrt{4 \cos^2 x}}_{2|\cos x|}$$

چون x در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\cos x$ مثبت بوده و $|\cos x| = \cos x$. بنابراین داریم:

$$\left(\frac{-\cos 2x}{\cos x} \right) \times 2 \cos x = -2 \cos 2x$$

راه حل اول:

$$\underbrace{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}_{\frac{1}{2} \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{4} \sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{26}$$

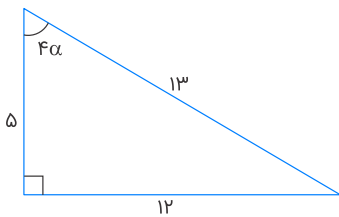
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

حال با داشتن $\sin 2\alpha$ ، مقدار $\cos 4\alpha$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2 = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$$

به کمک مثلث قائم‌الزاویه، مقدار $|\tan 4\alpha|$ را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\cos 4\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{5}{13}$$



$$\Rightarrow |\tan 4\alpha| = \frac{12}{5}$$

راه حل دوم:

$$1 + \tan^2 4\alpha = \frac{1}{\cos^2 4\alpha} \xrightarrow{\cos 4\alpha = \frac{5}{13}} 1 + \tan^2 4\alpha = \frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2 4\alpha = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |\tan 4\alpha| = \frac{12}{5}$$

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sin x(\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \sin x \cos x = ۱$$

$$\Rightarrow ۱ - \sin^2 x = -\sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = -\sin x \cos x \Rightarrow \cos^2 x + \sin x \cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x(\cos x + \sin x) = ۰$$

بنابراین دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$۱) \cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{[۰, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$۲) \cos x = -\sin x \xrightarrow{-\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)} \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow \text{نشدنی} \\ x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{[۰, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[۰, 2\pi]$ ، چهار جواب دارد.

$$2\sin^2 x = ۱ + \sin x \Rightarrow ۱ - 2\sin^2 x = -\sin x \Rightarrow \cos 2x = -\sin x$$

جای $-\sin x$ ، عبارت $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ قرار می‌دهیم:

$$\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (x + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(2k+1)\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ x = \frac{(2k-1)\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

مجموع جواب‌های بالا برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 2\pi$$

راه حل اول:

به کمک اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{4} \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sin^2 x \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = \sin \frac{-\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \text{جواب ندارد} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \frac{7\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$$

راه حل دوم:

$$\sin^2 x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

حال از معادله (*), داریم:

$$\frac{1}{4} \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

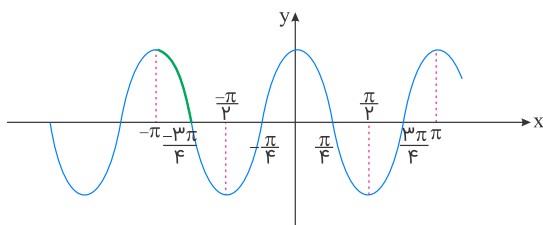
$$\xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{6}$ یا $-\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{6}$	غ.ق.ق
	✓	✓	✓

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$$

می‌دانیم:

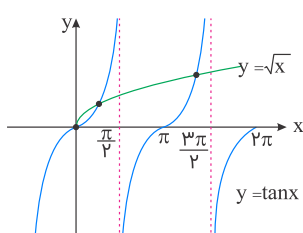
$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

پس نمودار تابع $y = \cos 2x$ را رسم می‌کنیم. داریم:

باتوجه به نمودار رسم‌شده در بالا، تابع در فاصله $\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر با $-\pi$ می‌باشد.

$$\sqrt{x} \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \sqrt{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sqrt{x} = \tan x$$

نمودار توابع $y = \sqrt{x}$ و $y = \tan x$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل این دو نمودار در فاصله $[0, 2\pi]$ در سه نقطه برخورد می‌کنند، درنتیجه معادله داده‌شده دارای سه جواب است.



عبارت $\sin \frac{13\pi}{8}$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{8}$$

پس معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 \frac{x}{4} &= 2 + \sin \frac{13\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8} \Rightarrow 4 \sin^2 \frac{x}{4} - 2 \\ &= -\cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8} \Rightarrow 4 \sin^2 \frac{x}{4} - 2 = -2 \cos \frac{\pi}{8} \\ \xrightarrow{\div (-2)} 1 - \sin^2 \frac{x}{4} &= \cos \frac{\pi}{8} \xrightarrow{1 - \sin^2 A = \cos^2 A} \cos^2 \frac{x}{4} = \cos \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

جواب معادله $\cos x = \cos A$ به صورت $x = 2k\pi \pm A$ است، پس:

$$\frac{x}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{8} \xrightarrow{\times 4} x = 8k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

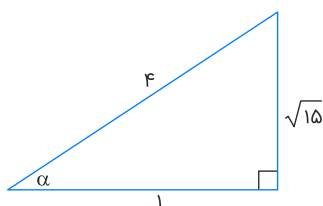
می‌دانیم:

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\tan 2\alpha = -\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

پس کافی است با داشتن $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ به محاسبه $\tan \alpha$ بپردازیم.

برای این منظور راحت‌تر است که به جای استفاده از روابط مثلثاتی، از رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی استفاده کنیم. از آنجا که $\cos \alpha$ ، نسبت ضلع مجاور به وتر است، پس ضلع مجاور را ۱ و وتر را ۴ در نظر می‌گیریم (فعلاً به علامت $\cos$ توجه نکنید) و ضلع سوم را به کمک فیثاغورس حساب می‌کنیم.

فیثاغورس:



حال برای محاسبه $\tan \alpha$ داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15}$$

توجه کنید که باتوجه به منفی بودن مقدار $\cos \alpha$ ، α در ناحیه دوم یا سوم مثلثاتی می‌باشد که باتوجه به اینکه در صورت سوال، α در نیمه پایین دایره مثلثاتی است، قطعاً در ناحیه سوم خواهد بود و مقدار $\tan \alpha$ مثبت می‌شود. پس داریم:

$$-\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{2(\sqrt{15})}{1 - (\sqrt{15})^2} = \frac{\sqrt{15}}{7}$$